COMPOSITION DE MATHEMATIQUES PRATIQUES

Temps accordé : 2 heures
(2 pages)

Dans tout le problème l'espace affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $\left(0\,;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
Il est recommandé aux candidats d'illustrer leurs démonstrations par des figures.

PARTIE I

1) On donne $R \in \mathbb{R}^{+*}$ et $h \in]\,0,\,2R\,[$. Déterminer le volume V de la calotte sphérique définie par $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ et $R-h \leq z \leq R$

On exprimera le résultat en fonction de R et de $u = \dfrac{R-h}{R}$.

PARTIE II

On appelle "cornet de glace" la partie d'un cône de révolution de sommet O, de demi-angle au sommet $\alpha \in]0,\dfrac{\pi}{2}[$, ce cône étant limité à son sommet et à une base circulaire de rayon r. Dans ce cornet vient s'insérer "une boule de glace" : sphère de rayon R ; cette sphère étant supposée tangente au cône le long de son cercle de base. Cette condition sera supposée réalisée dans tout le problème, sauf à la question 8.

2) Déterminer r en fonction de R et de α.

3) Calculer le volume V_0 du cornet en fonction de r et de α.

4) a) Calculer la fraction φ du volume du cornet occupée par de la glace.
Exprimer φ en fonction de $\sin\alpha$

b) Dans le cas où $\tan\alpha = \dfrac{1}{5}$, donner une valeur approchée de φ à 10^{-3} près.

5) Calculer le rapport du volume total V_1 de la glace, au volume V_0 du cornet. On exprimera encore ce rapport $\dfrac{V_1}{V_0}$ en fonction de $\sin\alpha$.

6) Déterminer le polynôme unitaire P de degré 4 tel que : $V_1 = V_0$ équivaut à $P(\sin\alpha) = 0$

7) P étant le polynôme défini dans la question 6, étudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs du réel x, pour $x \in [0,1]$.

8) a) La glace, en fondant, ne changeant pas de volume, pour quelles valeurs de α , le cornet peut-il contenir complètement la boule de glace fondue ? Est-ce réalisé pour tan $\alpha = \frac{1}{5}$?

b) Préciser en degrés, à 10^{-3} près, la limite α_0 des valeur de α pour lesquelles la condition du 8 a) est réalisée.
On indiquera la méthode de calcul utilisée.

PARTIE III

Suite à une bonne vente, le vendeur décide d'offrir en supplément une petite boule de glace au chocolat de rayon ρ placée dans le cornet de la façon suivante :

* la boule de glace au chocolat de rayon ρ
  - est entièrement incluse dans le cône.
  - est tangente intérieurement au cône.

** la boule de glace de rayon R, située au dessus
  - est tangente à la boule de chocolat de rayon ρ.
  - reste tangente au cornet le long de son cercle de base.

9) Déterminer ρ en fonction de r et de α .

10) a) Exprimer en fonction de sin α le rapport du volume V_2 de la petite boule de chocolat au volume V_0 du cornet.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de $\frac{V_2}{V_0}$ dans le cas où tan $\alpha = \frac{1}{5}$.

11) Exprimer enfin, en fonction de sin α , le rapport $\frac{V_2}{V_1}$ des volumes des deux boules et calculer α (en degrés, à 10^{-3} près) , de façon que $V_2 = \frac{V_1}{2}$.